

সহজ ক্যালকুলাস

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

ডিফারেন্শিয়েশন চেরাইতেওটি

1. ক্যালকুলাস কেন?
2. কেমন করে হল?
3. পরিবর্তনের হার
4. আসল ক্যালকুলাস
5. কিন্তু গুরুত্বপূর্ণ থিওরেম
6. মাধ্যমের মাধ্যমকে ডিফারেন্শিয়েশন
7. ইম্প্লিক্ট মাধ্যম (Implicit Function) :
8. মাধ্যমের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান

ইন্ট্রিমেশন

1. ডিফারেন্শিয়েশনের বিপরীত প্রক্রিয়া
2. অন্যভাবে ইন্ট্রিমেশন
3. ডেফিনিট ইন্টেগ্রাল

ভূমিকা

ক্যালকুলাস বিষয়টা আমাৰ কাছে সবসময়েই গ্ৰাম ম্যাজিনেম মত মনে হোৱে! যাৰা বিজ্ঞান কিংবা প্ৰযুক্তি নিৰে লেখপড়া কৰে তাদেৱ সবাইকেই আগে হোক কিংবা পৰে হোক এটা শিখতে হয়। কিন্তু অনেক সময়েই দেখেছি ক্ষেপণেৰেৱা ক্যালকুলাস ব্যবহাৰ কৰাৰ কিন্তু নিয়ম শিখেই কাজ চালিয়ে যাচ্ছে। তাৰ তেজবগৱ সৌন্দৰ্যটা নিয়ে আহৰণী হচ্ছে না, তাহি আমি এই হোট বইটা শিখেছি ক্ষেপণেৰেৱে তেজব ক্যালকুলাসেৰ জন্যে আহৰণ জন্মানোৱ জন্যে!

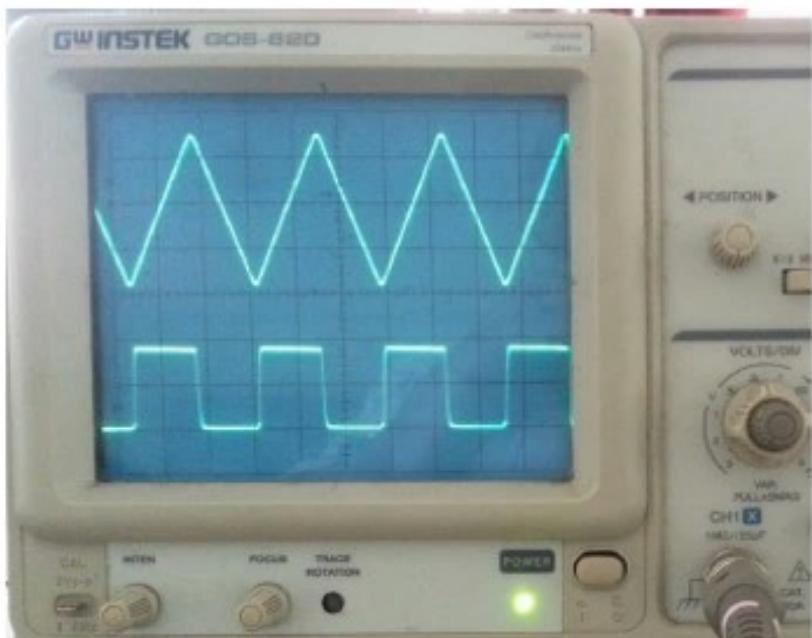
তবে সবাইকে আমি মনে কৰিয়ে দিই, গণিতেৰ একটা বই সেখাৰ জন্যে যে বকল নিয়ম মেনে চলতে হয় এই বইয়ে সেটা কিন্তু মেনে চলা হয়নি। যেমন, অচল একটি জাহাগীয় সত্ত্বিকারেৰ কাহশন নয় সে বকল একটি উদাহৰণেও ক্যালকুলাস ব্যবহাৰ কৰা হোৱে (দেখি কে সেটা বেৱ কৰতে পাৰে!) তাই কেউ বলি এই বই পতেক থেমে যাব তাৰে হবে না, এটা পড়া শৈব কৰে তাকে সত্ত্বিকারেৰ ক্যালকুলাস বই পড়তে হবে।

আৰও একটা বিষয় মনে কৰিয়ে দেৱা যায়- মানুষ যেতাৰে বিশ্বানায় তাৰে কিংবা গালে হাত দিয়ে গল্প বই পতেক সেতাৰে এই বট্টাটি পড়লে হবে না। দেয়াৰ টেবিলে বসে খাতা এবং বকল হাতে নিয়ে এটি পড়তে হবে, উদাহৰণকোলা বুঢ়াতে হবে, অনুশীলনীকোলা সমাধান কৰতে হবে! তা না হলে কিন্তু ক্যালকুলাস শৈখা হবে না!

মুহম্মদ জাফর ইকবাল

৯.৬.২০১৬

ডিফারেন্সিয়েশান কিংবা ডেরাইভেটিভ



ইলেক্ট্রনিক্স সার্কিট দিয়ে ডিফারেন্সিয়েট করা। উপরের বস্তুগতির ডেরাইভেটিভ নিচে।

1. ক্যালকুলাস কেন?

যারা প্রথমবারের মত ক্যালকুলাস শিখতে যাচ্ছে তাদের অনেকের মনেই ধন্দে জাগতে পারে, কেন একজনকে ক্যালকুলাস শিখতে হবে? আমরা পাটিগণিত শিখেছি, এলজেবরা শিখেছি, জ্যামিতি শিখেছে- এই গুলি দিয়েই কি কাজ ঢালিয়ে দেয়া যায় না? ক্যালকুলাস নামে সম্পূর্ণ নৃত্য একটা গণিত কেন আমাদের শিখতে হবে?

উন্নত খুবই সোজা, এক কথায় বলে দেয়া যায় : ক্যালকুলাস না জানলে বিজ্ঞানের খুব সাধারণ কাজকর্মও ঢালানো যায় না। যেমন তোমরা সবাই গতিবেগের বিষয়টা জান, কেননো একটা বিষ্ণু চলতে থাকলেই আমরা বলি তার একটা গতিবেগ আছে। তুমি যদি ক্যালকুলাস না জান তাহলে একটা বস্তুর গতিবেগ পর্যন্ত বের করতে পারবে না!

যারা আমার কথা বিশ্বাস করছ না তাদেরকে সহজ থেকেও সহজ একটা ধন্দে করা যাক। ধরা যাক তুমি দেখছ একটা গাড়ি প্রথম সেকেন্ডে দূরত্ব অতিক্রম করেছে $5m$, দ্বিতীয় সেকেন্ডের শেষে মোট দূরত্ব অতিক্রম করেছে $20m$ । ঠিক একইভাবে দেখা গেল তৃতীয় সেকেন্ডের শেষে গাড়িটির মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব $45m$ এবং চতুর্থ সেকেন্ডের শেষে সর্বমোট অতিক্রান্ত দূরত্ব হচ্ছে $80m$. বিষয়টা বুঝতে যেন সমস্যা না হয় সেজন্য 1 নং টেবিলে বিষয়টা দেখিয়ে দেয়া হল।

এখন তোমাদেরকে সোজা থেকেও সোজা একটা ধন্দে করা যাক, গাড়িটি কত বেগে চলছে?

মোটামুটি নিশ্চিতভাবে বলা যায় তোমাদের কেউ কেউ বলছ, যেহেতু 4 সেকেন্ডে মোট $80m$ দূরত্ব অতিক্রম করেছে তাই গাড়িটির বেগ হচ্ছে :

$$v = \frac{80m}{4s} = 20 m/s$$

কেউ কেউ বলছ, ব্যাপারটা এত সোজা না, গাড়িটির বেগ আচ্ছে আচ্ছে বাঢ়ছে কাজেই আমি যদি $80m$ কে $4s$ দিয়ে ভাগ করে বেগ বের করি সেটা হবে গাড়ি বেগ! সেটা তাৎক্ষণিক প্রকৃত বেগ না। তোমাদের মাঝে যারা ঢালাক চতুর তারা মোটামুটি বুঝতে পারছ যে বেগটা আচ্ছে আচ্ছে বাঢ়ছে এবং সেই বেগটা বের করা

অতিক্রান্ত সময় (s)	অতিক্রান্ত দূরত্ব (m)
1	5
2	20
3	45
4	80

1 নং টেবিল

Activate V
Go to Setting

সম্ভব না ! যারা আরো বেশি চালাক চতুর তারা অবশ্যি টেলিটা দেখে অনুমান করতে পারবে যে অতিক্রান্ত দূরত্বের জন্যে একটা সৃতি বের করা যায় সেটা হচ্ছে :

$$S = 5t^2$$

এই সৃতিটা দিয়ে যে কোনো সময় t তে কতোটুকু দূরত্ব অতিক্রম করেছে সেটা বের করা যাবে, কিন্তু 2.5 s এ গাড়িটির বেগ কতো সেটা বের করায় কোনো উপায় নেই ! কিন্তু তার বেগ কত সেটা বের করা যাবে না । যেরকম 2.5 s শেষে অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করা যাবে । সেটি হচ্ছে $S = 5(2.5)^2 \text{ m} = 31.25\text{m}$

কিন্তু তুমি যদি ক্যালকুলাস জানতে তাহলে চোখের পলকে বলে ফেলতে পারতে গাড়ির বেগ হচ্ছে

$$v = 10t$$

তখন 2.5 s এ কেন, যে কোনো সময়ের জন্যে গাড়িটির বেগ বের করতে পারতে, এ রকম হাজার রকমের হাজারটা উদাহরণ দেয়া সম্ভব ! কাজেই যাগো বিজ্ঞান শিখতে চায় তাদের স্বার ক্যালকুলাস শিখতে হয় ।

2. কেমন করে হল ?

অতিক্রান্ত দূরত্ব $S = 5t^2$ কেন বলা হয়েছিল সেটা আমরা হয়তো অনুমান করতে পারি কিন্তু বেগ v কেন $10t$ সেটা আমরা কেমন করে বের করেছি ?

আসলে কাজটা মোটেও কঠিন নয় ।

ব্যাপারটা ভাল করে বোকার জন্যে আমরা প্রথমে অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং সময়ের একটা ঘাস একে কেলি (১ নং ছবি) ।

ধরা যাক এই ঘাসে t_1 সময়ে বেগ কতো আমরা সেটা বের করতে চাই ।

আমার ঘাসে দেখতে পাইছি t_1 সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব S_1 । এখন ধরা যাক t_1 এর কিছুক্ষণ পর অন্য একটি সময় t_2 তে অতিক্রান্ত দূরত্ব হচ্ছে S_2 । কাজেই আমরা বলতে পারি t_1 এবং t_2 এর মাঝখানে গাড়িটির গড় বেগ হচ্ছে :

$$v = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

কিন্তু আমরা তো দুটো সময়ের ভেতরকার গড় বেগ করতে চাইছি না আমরা যে কোনো একটা নির্দিষ্ট সময়ের (যেমন t_1) তাঁক্ষণ্যিক বেগ বের করতে চাইছি ।

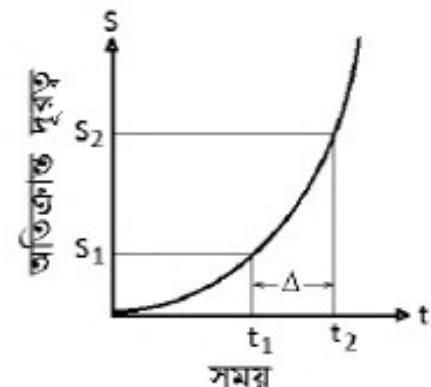
এবাবে আমরা t_1 এবং t_2 এর মাঝখানের সময়টাকে বলি Δ , অর্থাৎ

$$t_2 = t_1 + \Delta$$

তাহলে আমরা S_1 এবং S_2 কে নৃতনভাবে লিখতে পারি । যেহেতু $S = 5t^2$ কাজেই,

$$\begin{aligned} S_1 &= 5t_1^2 \text{ এবং } t_2 \text{ সময়ে} \\ S_2 &= 5t_2^2 = 5(t_1 + \Delta)^2 \\ &= 5(t_1^2 + 2t_1\Delta + \Delta^2) \\ &= 5t_1^2 + 2t_1\Delta + \Delta^2 \end{aligned}$$

কাজেই t_1 এবং t_2 সময়ের ভেতরকার গড়বেগ হচ্ছে



1 নং ছবি

$$v = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{5(t_1^2 + 2t_1\Delta + \Delta^2) - 5t_1^2}{\Delta} = \frac{10t_1\Delta + 5\Delta^2}{\Delta}$$

কিন্তু :

$$v = 10t_1 + 5\Delta$$

এখন তোমরা আবার গ্রাফটির দিকে আসাও t_1 এবং t_2 এর মাঝখানের সময়টুকু হচ্ছে Δ , কাজেই t_2 কে যদি t_1 এর কাছাকাছি আনতে থাকি তাহলে Δ এর মানও ছোট হতে থাকবে ।

আমরা আগেই বলেছি আমরা t_1 এবং t_2 এর ভেতরকার গড় বেগ বের করেছি । t_2 কে t_1 এর কাছে আনতে আনতে যদি সেটাকে হবহ t_1 করে কেলি তাহলে কী হবে ? নিচরাই তখন সেই বেগটা আর গড়বেগ থাকবে না । সেটা t_1 এর তাঁক্ষণ্যিক বেগ ।

অর্থাৎ t_1 এ তাঁক্ষণ্যিক বেগ বের করার জন্যে t_2 কে t_1 এর কাছে নিয়ে আসতে হবে ।

অর্থাৎ Δ কে শূন্য করে কেলতে হবে !

$$\Delta \rightarrow 0$$

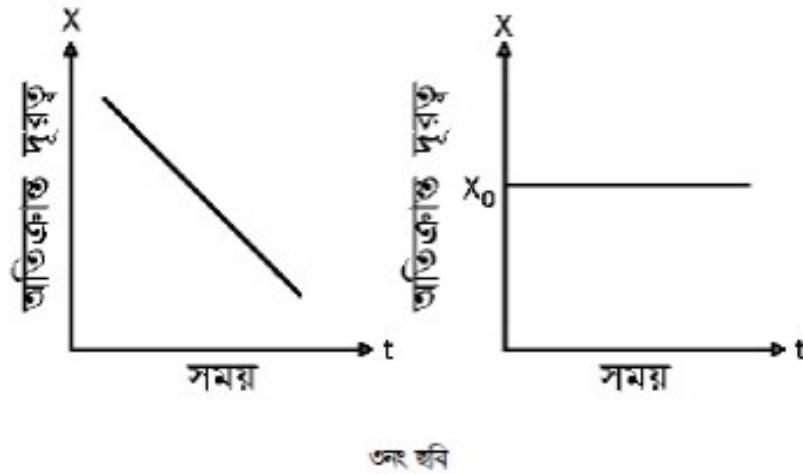
এবাবে v এর সমীকরণে Δ এর মান শূন্য বসিয়ে দিলে আমরা পাব :

$$v = 10t_1$$

t_1 একটি নির্দিষ্ট সময় হলেও এটি যে কোনো সময়ের জন্যে সত্যি । কাজেই সাধারণভাবে লিখতে পারি:

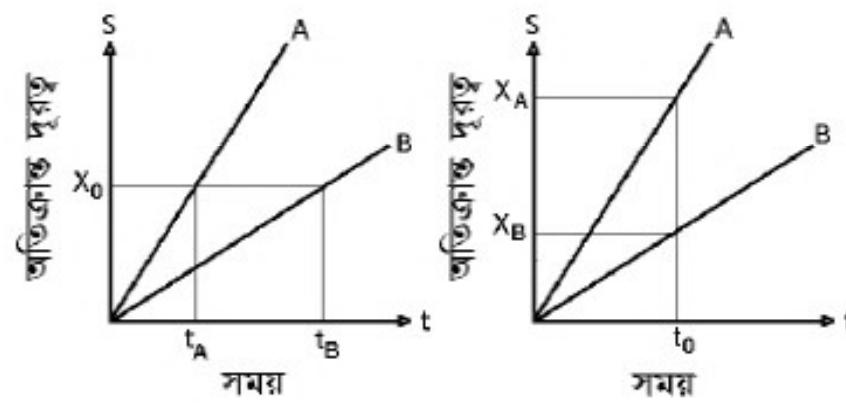
$$v = 10t$$

এখন পর্যন্ত ঘোড়াকে করা হয়েছে সেটা যদি রুক্ষে থাবে তাহলে ধরে নেয়া যাবে তোমরা ক্যালকুলাস শিখে দেলোছ! তোমরা ইচ্ছা করলে আর্কিমিডিসের মত ইউরেকা ইউরেকা বলে চিন্মূল করে ঘর থেকে বের হয়ে যেতে পার- অবশ্যই জামা কাপড় পরে!



৩নং ছবি

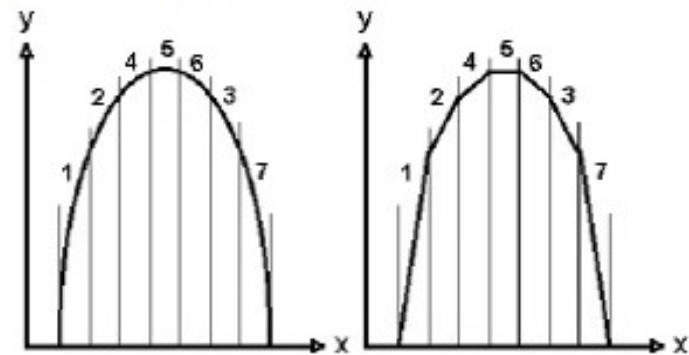
শুধু একটা বিষয় লক্ষ্য কর, আমরা সবাই জানি কোনো কিছুকে শূন্য দিয়ে ভাগ করা যায় না। এখানে কিন্তু আমরা Δ দিয়ে ভাগ দিয়েছি। যখন ভাগ দিয়েছি তখন বলিনি $\Delta = 0$, সবকিছু শেষ করার পর বলেছি $\Delta \rightarrow 0$, তখন কিন্তু কোনো সমস্যা হয়নি।



২নং ছবি

৩. পরিবর্তনের হার :

এতক্ষণ আমরা ক্যালকুলাসের উদাহরণ দিয়েছি, সত্যিকারের একটা সমস্যার সমাধানও করেছি। এবাবে সমাধান করার জন্যে যে গমিতটুকু ব্যবহার করতে হয় তার কল কজাওলোর সাথে পরিচিত হব!



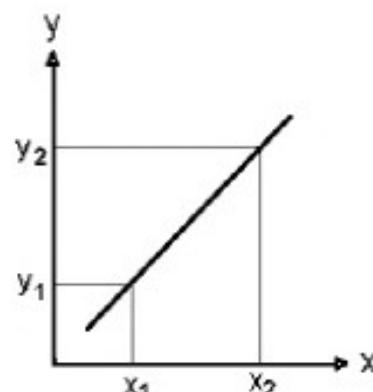
৪নং ছবি

প্রথমেই তোমাদের মনে করিয়ে দিই, আগের সমস্যাটিতে কোনো একটা বক্তুর অবস্থান দেয়া ছিল, সময়ের সাথে সেটি কীভাবে পরিবর্তিত হচ্ছিল সেই তথ্যটুকু দেয়া ছিল, সেখান থেকে আমরা বেগ বের করেছি। বেগ হচ্ছে সময়ের সাথে অবস্থানের পরিবর্তনের হার অর্থাৎ যদি সময়ের সাথে পরিবর্তনের হার বেশি হয় তাহলে বেগ বেশি, পরিবর্তনের হার কম হলে তার বেগ কম।

২নং ছবিতে দুটো বক্তু A এবং B এর সময়ের সাথে অবস্থানের পরিবর্তন দেখা হয়েছে। প্রথম ছবিতে আমরা দেখছি X_0 দূরত্ব অতিক্রম করতে A এবং B বক্তুর সময় লেগেছে t_A এবং t_B , যেহেতু t_B ছোট এবং t_A বড় তাহলে কলা যেতে পারে। একই দূরত্ব (X_0) B বক্তু A বক্তু থেকে আগে অতিক্রম করতে পারে। কাজেই B এর অবস্থানের পরিবর্তনের হার A থেকে বেশি কাজেই B এর বেগ বেশি। দ্বিতীয় ছবিতে দেখানো হয়েছে t_0 সময়ে A এবং B বক্তু X_A এবং X_B দূরত্ব অতিক্রম করেছে। যেহেতু X_B , X_A থেকে বেশি তাই কলতে পারব B এর অবস্থানের পরিবর্তনের হার বেশি অর্থাৎ B এর বেগ বেশি।

আমরা পরিবর্তনের হার শব্দটার সাথে পরিচিত হতে চাইছি তাই আরো দুটো উদাহরণ দেয়া যাক। ৩নং ছবিতে প্রথমটিতে t এর সাথে অবস্থান X কমে যাচ্ছে, তার পরিবর্তনের হার হচ্ছে নিগেটিভ।

ধিতীয় ছবিতে সময়ের সাথে অবস্থানের কোনো পরিবর্তনই হচ্ছে না যার অর্থ এখানে পরিবর্তনের হার শূন্য। এটি যদি একটি গাড়ীর অবস্থান-সময়ের গ্রাফ হয়ে থাকে তাহলে বুঝতে হবে গাড়ীটা X_0 জায়গায় চুপচাপ দেমে আছে।



৫নং ছবি

আগের উদাহরণগুলোতে পরিবর্তনের হার বোঝার কাজটুকু খুব সহজ ছিল কারণ প্রত্যেকটা উদাহরণে একটা করে সরল রেখা আঁকা হয়েছিল এবং সরল রেখার দিকে তাকালেই আমরা বুঝতে পারি সেটা কী ঢালু নাকী খাড়া, যত খাড়া হতে থাকবে পরিবর্তনের হার হবে তত বেশি। শুধু তাই নয় যেহেতু এগুলো সরল রেখা ছিল তাই অবস্থানের পরিবর্তন হলেও পরিবর্তনের হার সব সময়েই সমান। পরিবর্তনের হার কোনো সময়ে বেশি, কোনো সময়ে কম তা কিন্তু নয়।

কিন্তু পরিবর্তন যে সব সময়ে সমান হারে সরল রেখায় হবে তা কিন্তু নয়। আমরা বইয়ের কৃত্তি যে উদাহরণটা দিয়েছি তাতে পরিবর্তন কিন্তু সরল রেখায় ছিল না! তাই পরিবর্তন সরল রেখায় না হলেও পরিবর্তনের হার আছে এবং সেটি একেক সময়ে একক রকম হওয়া সম্ভব। কোথাও বেশি কোথাও কম হতে পারে, কোথাও পজিটিভ কোথাও নিগেটিভ হতে পারে এমন কী কোথাও শূন্য হতে পারে। সে ক্রমে হলে আমরা কী করব?

৪নং ছবিতে একটা উদাহরণ দেয়া হয়েছে যেটা মোটেই সোজা নয়, (আমরা আবাসের দিকে খিঁড় একটা ছুড়ে দিলে এটা এভাবে উপরে উঠে আবার নিচে নেমে আসতে পারে।) আমরা এটার জন্যে যদি পরিবর্তনের হারটুকু অনুভব করতে চাই তাহলে কী করব?

একটা উপায় হচ্ছে পুরো অংশটাকে অনেকগুলো ভাগ করে নেয়া তাহলে প্রত্যেকটা ভাগকেই মোটামুটি সরল রেখা মনে হবে। আমাদের ছবিতে আমরা সাতটা অংশে ভাগ করেছি এবং সাতটা সরল রেখা এঁকেছি। এখন প্রত্যেকটা সরল রেখার দিকে তাকিয়েই বলে দিতে পারব, সরল রেখাটার কোথায় ঢালু বা কোথায়

খাড়া, কোথায় বাড়ছে এবং কোথায় কমছে বা কোথাও কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না। ছবিটার দিকে তাকিয়েই বলে দিতে পারি :

১ এবং ৭ : সবচেয়ে খাড়া, যদিও ১ এ এটা বাড়ছে কিন্তু ৭ এ কমছে।

২ এবং ৬ : মোটামুটি ঢালু, এখানে ২ এ বাড়ছে ৬ এ কমছে।

৩ এবং ৫ : সবচেয়ে কম

ঢালু, এখানে ৩ এ বাড়ছে

এবং ৫ এ কমছে।

৪ : কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না।

একটা সরল রেখা কতোটুকু ঢালু সেটা মাপা খুব সহজ। ৫নং ছবিতে সেটা দেখানো হয়েছে। সরল রেখাটা যদি $x - y$ অক্ষে আঁকা হয় তাহলে সরল রেখার কতোটুকু ঢালু তাৰ পরিমাণ হচ্ছে:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

এই পরিমাণটাকে

গণিতের ভাষায় Slope বলে আমরা এটার বাংলা করেছি ঢাল। কাজেই ছবিতে দেখানো সরলরেখার ঢাল যদি m দিয়ে প্রকাশ করি তাহলে

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

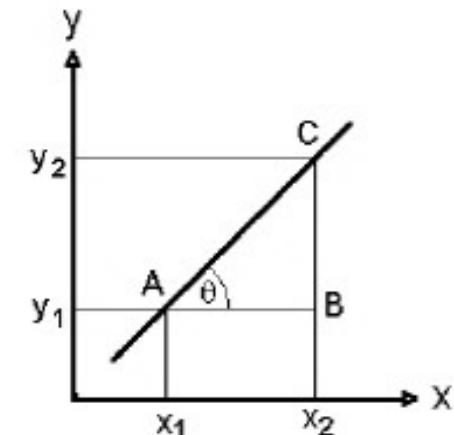
আমরা অন্যভাবেও ঢাল বের করতে পারি।

সরল রেখাটির দুটি বিন্দু দিয়ে একটা সমকেণ্টি ত্রিভুজ ABC আঁকতে পারি (৬নং ছবি)। আমরা এই মাত্র দেখেছি ঢালের সংজ্ঞা অনুযায়ী

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{BC}{AB}$$

ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$ হচ্ছে সমরোধ তাই আমরা ত্রিকোণেমিতি ব্যবহার করে লিখতে পারি;

$$\tan\theta = \frac{\text{লঙ্ঘ}}{\text{তুমি}} = \frac{BC}{AB}$$



৬নং ছবি

অর্থাৎ ঢাল $m = \tan\theta$

কাজেই একটা সরল রেখার ঢাল বা Slope হচ্ছে ভূমির সাথে যে কোণ
করেছে তার Tangent!!

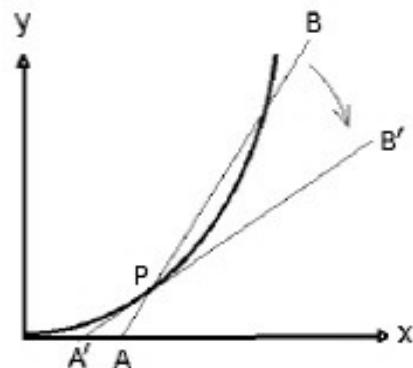
ধরা যাক আগের উদাহরণে

সাতটি অংশের m_1 থেকে m_7
পর্যন্ত সাতটি ঢাল। কাজেই
আগের উদাহরণটির জন্য বলতে
পারিঃ

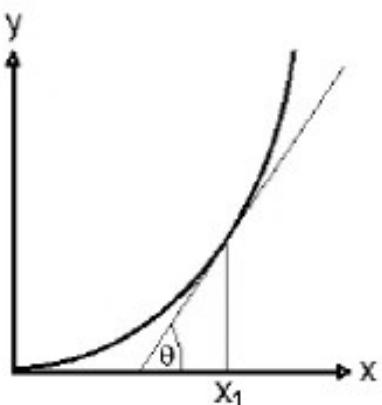
$$\begin{aligned} m_1 &> m_2 > m_3 > m_4 \\ &= 0 \\ &> m_5 \\ &> m_6 \\ &> m_7 \end{aligned}$$

আমরা সবাই দেখতে পাচ্ছি,
যাত্র সাতটা ভাগ করার কারণে
৪নং ছবির দ্বিতীয় অংশটি
পুরোপুরি প্রথম ছবির মত হয়নি!

হওয়ার কথা ও নয়— সরল রেখা
নিয়ে বাঁক রেখা আঁকা যায় না! বোকাই যাচ্ছে আমরা যদি সাতটি ভাগে ভাগ না
করে, 14টি ভাগে ভাগ করতাম তাহলে সেটা আরো ভালো ভাবে প্রথম ছবির
কাছাকাছি হত, তবে তখন রেখাটির 14টি জায়গায় 14টি ঢাল থাকত। 14টি না
হয়ে 28 হলে আরো ভালো
হত, 56 হলে আরো ভালো
হত, এভাবে বাড়তে বাড়তে
অনীম সংখ্যক হলে পুরোপুরি
মিলে যেতো! যখন সংখ্যাটি
অনীম তখন সেই ছেট থেকে
ছেট সরল রেখাটি কী রকম?
একটু চিন্তা করলেই দেখবে
সেটি তখন রেখাটির সেই
বিন্দুতে স্পর্শক (tangent)।
বিষয়টা ভালো করে
বোনানোর জন্যে একটা বাঁক



৭নং ছবি



৮নং ছবি

রেখাকে যখন ছেট ছেট সরল রেখা দিয়ে উপস্থাপন করা হয়েছিল সে রকম একটি
ছেট সরলরেখা AB নিই (৭নং ছবি)।

রেখাটি ইচ্ছে করে একটু বড় করে আঁকা হয়েছে যেন x অক্ষকে A বিন্দুতে
ছেদ করে। এটা বাঁক রেখাটাকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন কজ্জলা কর AB
রেখার P বিন্দুটি ঠিক রেখে B টাকে B' এর দিকে ঠেলে দেয়া হচ্ছে। স্বাভাবিক
ভাবেই A বিন্দুতে তখন A' এর দিকে সরে যাবে। যদি রেখাটি এমনভাবে ঠেলে
দেয়া যায় যে সেটি শুধুমাত্র P বিন্দুতে স্পর্শ করবে অন্য কোথাও নয় তখন $A'B'$
রেখাটি হবে P বিন্দুতে বাঁক রেখাটির স্পর্শক। P বিন্দুতে পরিবর্তনের হার হচ্ছে
এই স্পর্শক $A'B'$ এর ঢাল।

অর্থাৎ যদি কোনো কোনো একটা পরিবর্তনশীল রাশির পরিবর্তনের হার কোনো
এক ধরনের রেখা দিয়ে আঁকি (৮নং ছবি) তাহলে কোনো একটা X_1 বিন্দুতে
পরিবর্তনশীল রাশির পরিবর্তনের হার হচ্ছে সেই বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, ছবিতে
যে রকম দেখানো হয়েছে! স্পর্শক একটা সরলরেখা, আমরা তার ঢাল বের করা
জানি! সরল রেখাটি যদি ভূমির সাথে θ কোণ করে থাকে তাহলে ঢাল m হচ্ছে

$$m = \tan\theta$$

4. আসল ক্যালকুলাস :

এবাবে আমরা আসল ক্যালকুলাস শুরু করে দিতে পারি! ধরা যাক একটি
ফাংশন $f(x)$ আমরা তার পরিবর্তনের হার বের করতে চাই। $f(x)$ কী ধরনের
ফাংশন তার উপর নির্ভর করবে কোণ x এ $f(x)$ এর পরিবর্তনের হার কত।
কোথাও সেটি বেশি কোথাও কম হতে পারে — এবং সেটা আমরা অন্য একটা অন্য
একটা ফাংশন দিয়েও প্রকাশ করতে পারি।

আমরা এখন পরিবর্তনের হার বের করা শিখে গেছি, শাক পেপারে ফাংশনটি
আঁক গেলে যে বিন্দুতে পরিবর্তনের হার বের করতে চাই সেই বিন্দুতে একটা
স্পর্শক ঠিকে তার ঢাল বের করে নিতাম। কিন্তু আমরা নির্দিষ্ট একটা x বিন্দুতে
পরিবর্তনের হার বের না করে এমনভাবে সেটা সেটা বের করতে চাই যেন সব x
এর জন্যেই সেটা সত্য হতে পারে।

আমরা x এবং $x + \Delta$ এই দুটি মানের জন্যে ফাংশনটির মান বের করতে
পারব, সেটি হবে $f(x)$ এবং $f(x + \Delta)$ । কাজেই

$f(x)$ এর পরিবর্তন হচ্ছে

$$f(x + \Delta) - f(x)$$

এবং $f(x)$ এর পরিবর্তনের হার হচ্ছে

$$\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

এখন আমরা Δ কে ছোট করতে ক্রতে ধায় শূন্য করে ফেলতে পারি সেটা
আমরা

বোকুব

এভাবে:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0}$$

কাজেই $f(x)$ এর পরিবর্তনের হার হচ্ছে

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}$$

এটাকে লেখা হয় এভাবে

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}$$

মুখে বলার সময় আমরা এটাকে বলি x এর সাপেক্ষে ফাংশন $f(x)$ এর
ডিফারেন্সিয়েশন!

মনে রাখতে হবে এটা কিন্তু df এবং dx এর ভাগফল নয়, এটা হচ্ছে একটা
প্রক্রিয়া যেটা $f(x)$ এর উপর প্রয়োগ করা হচ্ছে। আমরা দুভাবে লিখতে পারি

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ কিংবা } \frac{d}{dx} f(x)$$

এবাবে তাড়াতাড়ি কয়েকটা উদাহরণ দেয়া যাব।

$$(i) f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &=? \\ \frac{dx^2}{dx} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^2 - x^2}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta + \Delta^2 - x^2}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{2x\Delta + \Delta^2}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2x + \Delta \end{aligned}$$

কাজেই :

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

$$(ii) f(x) = x^3$$

$$\frac{df(x)}{dx} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{dx^3}{dx} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^3 - x^3}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta + 3x\Delta^2 + \Delta^3 - x^3}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta + 3x\Delta^2 + \Delta^3}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} 3x^2 + 3x\Delta + \Delta^2 \\ &\quad \frac{dx^2}{dx} = 3x^2 \end{aligned}$$

$$(iii) f(x) = x^n$$

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &=? \\ \frac{dx^n}{dx} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^n - x^n}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta + \frac{n(n-1)}{n}x^{n-2}\Delta^2 + \dots \Delta^n - x^n}{\Delta} \end{aligned}$$

এখানে আমরা $(x + \Delta)^n$ এর Binomial expansion করেছি
(পরিশিষ্ট)।

$$\begin{aligned} \frac{dx^n}{dx} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}\Delta + \frac{n(n-1)}{n}x^{n-2}\Delta^2 + \dots \Delta^n}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{n}x^{n-2}\Delta + \dots \Delta^{n-1} \end{aligned}$$

এখানে প্রথম দুটো পদ লেখা হয়েছে, পরের পদগুলোতে Δ^2, Δ^3 এভাবে
থাকবে। যখন $\lim_{\Delta \rightarrow 0}$ করা হবে তখন প্রথম পদ ছাড়া অন্য সবগুলো শূন্যতে
পরিণত হবে। কাজেই

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

যদিও এটা করা হয়েছে পজিটিভ n এর জন্যে কিন্তু এটা নিগেটিভ n বিংবা
ত্যাংশ n এর জন্যেও সত্য !

$$(iv) f = \sin \theta \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} = ?$$

$$\frac{dsin\theta}{d\theta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta + \Delta) - \sin\theta}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta\cos\Delta + \cos\theta\sin\Delta - \sin\theta}{\Delta}$$

আমরা এবার $\cos\Delta$ এবং $\sin\Delta$ এর সিরিজ দুটি (পরিশিষ্ট) ব্যবহার করতে
পারি।

$$\cos\Delta = 1 - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^4}{4!} \dots$$

$$\sin\Delta = \Delta - \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{\Delta^5}{5!} \dots$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta \left(1 - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^4}{4!} \dots\right) + \cos\theta \left(\Delta - \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{\Delta^5}{5!} \dots\right) - \sin\theta}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \cos\theta - \frac{1}{2} \sin\theta\Delta + \frac{1}{6} \cos\theta\Delta^2 \dots$$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{dsin\theta}{d\theta} = \cos\theta$$

$$(v) f = \cos \theta \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} = ?$$

$$\frac{dcos\theta}{d\theta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta + \Delta) - \cos\theta}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos\theta\cos\Delta - \sin\theta\sin\Delta - \cos\theta}{\Delta}$$

আমরা আবার $\cos\Delta$ এবং $\sin\Delta$ এর জন্যে সিরিজ দুটি ব্যবহার করি।
যেহেতু $\Delta \rightarrow 0$ কাজেই প্রথম এক-দুটি পদ নেওয়াই যথেষ্ট।

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos\theta \left(1 - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^4}{4!} \dots\right) - \sin\theta \left(\Delta - \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{\Delta^5}{5!} \dots\right) - \cos\theta}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} -\sin\theta - \frac{1}{2} \cos\theta\Delta + \frac{1}{6} \sin\theta\Delta^2 \dots$$

অর্থাৎ

$$\frac{dcos\theta}{d\theta} = -\sin\theta$$

$$(vi) f(x) = C \text{ একটি ফ্রেক্ট বা constant. } \frac{df(x)}{dx} = ?$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}$$

যেহেতু x এর মানের জন্যেই $f(x) = C$ কাজেই

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta}$$

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

অর্থাৎ কোন ফাংশন যদি পরিবর্তন না হয় তাহলে তার ডিফারেন্সিয়েশন শূন্য।

$$(vii) f(x) = e^x \quad \frac{df(x)}{dx} = ?$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{(x+\Delta)} - e^x}{\Delta}$$

$$= e^x \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^\Delta - 1}{\Delta}$$

আমরা e^Δ এর জন্যে সিরিজটি লিখতে পারি,

$$e^\Delta = 1 + \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^3}{3!} + \dots$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^\Delta - 1}{\Delta} = 1$$

কাজেই

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

আমি সবাইকে বলব এই ডিফারেন্সিয়েশনটাকে ভালো করে দেখতে। e^x হচ্ছে
এমন একটা চমকপদ ফাংশন যার পরিবর্তনের হার ভিন্ন আরেকটি ফাংশন নয় –
পরিবর্তনের হার হচ্ছে সেই একই ফাংশন।

অনুশীলনী

1.-4. ছবিতে দেখানো ঢাক্টি ফাংশনের ডেরাইভেটিভ কেন্দ্র হবে ঠিক নিচে
সেটি একে দেখাও।

5. ডেরাইভেটিভ বের কর: $f(x) = x^3 + 3x - 6$

6. ডেরাইভেটিভ বের কর: $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

7. ডেরাইভেটিভ বের কর: $S(t) = ut + \frac{1}{2}at^2$

8. $f(x) = 2x^3$ এর $x = 3$ তে ডেরাইভেটিভ কত?

9. একটি দেশের জনসংখ্যা $y = 10t + t^2$ হিসেবে বাড়ছে। যখন
 $t = 100$ তখন জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার কতো?

10. $y = 5x^2 + 2x + 3$ উপরুক্তের $x = 1$ এবং $x = -1$ এ ঢাল
কত?

5. কিন্তু গুরুত্বপূর্ণ থিওরেম

1. একটি ফ্রবকের (C) ডিফারেন্সিয়েশন হচ্ছে শূন্য: $\frac{d}{dx} C = 0$

2. একটি ফ্রব এবং একটি ফাংশনের গুণফলের ডিফারেন্সিয়েশন হচ্ছে ফ্রব
এবং ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশনের গুণফল। $\frac{d}{dx}(Cf(x)) = C \frac{d}{dx} f(x)$

3. দুটি ফাংশনের যোগ এবং বিয়োগফলের ডিফারেন্সিয়েশন হচ্ছে দুটি
ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশনের যোগ এবং বিয়োগফল।

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

4. দুটি ফাংশনের গুণফলের ডিফারেন্সিয়েশন হচ্ছে:

$$\frac{d}{dx} f(x) \times g(x) = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$$

অর্থাৎ প্রথম ফাংশন \times দ্বিতীয় ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশন + দ্বিতীয় ফাংশন \times
প্রথম ফাংশনের ডিফারেন্সিয়েশন।

5. দুটি ফাংশনের ভাগফলের ডিফারেন্সিয়েশন হচ্ছে:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$



অর্থাৎ (ভাজা \times ভাজকের ডিফারেন্সিয়েশন) - ভাজক \times ভাজের
ডিফারেন্সিয়েশন) \div ভাজকের বর্গ

এই পার্টিটি থিওরেম প্রমাণ করতে পারবে?

প্রথমটা প্রমাণ করা হয়ে গেছে অন্যগুলো এমন কিছু কঠিন নয়, তেওঁ করে
দেখ!

ধরে নিছি আমরা $\frac{dy}{dx}$ বা পরিবর্তনের হার বিষয়টা বুঝেছি, কেন্দ্র করে সেটা
বের করা যায় সেটাও শিখে ফেলেছি।

আমরা মেহেতু প্রক্রিয়াটি জেনেছি এবারে বেশ কিছু ফাংশনের উপর প্রয়োগ
করে দেখি।

এবারে কিছু উদাহরণ:

(i) $f(x) = \sqrt{x}$ আমরা সরাসরি নিখে কেলি:

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta} - \sqrt{x}}{\Delta}$$

উপরে নিচে $\sqrt{x + \Delta} + \sqrt{x}$ দিয়ে গুণ করা যাক

$$\begin{aligned} \frac{d\sqrt{x}}{dx} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x + \Delta - x}{\Delta(\sqrt{x + \Delta} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta} + \sqrt{x}} \\ \frac{d\sqrt{x}}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

অর্থাৎ তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে। আমরা আগে দেখিয়েছিলাম,

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

এখানে $n = \frac{1}{2}$ বসালেও আমরা একই উভয় পাব :

$$\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. $f(x) = \log x$

$$\frac{d}{dx} \log x = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\log(x + \Delta) - \log x}{\Delta}$$

কিন্তু আমরা জানি

$$\log AB = \log A + \log B$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

কাজেই আমরা লিখতে পারি :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \log x &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \log \left(\frac{x + \Delta}{x} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\log \left(1 + \frac{\Delta}{x} \right)}{\Delta} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{xz}\end{aligned}$$

ধরে নিই $z = \frac{\Delta}{x}$ তাহলে লিখব $\frac{d}{dx} \log x = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{xz}$

লক্ষ কর যেহেতু $\lim_{\Delta \rightarrow 0}$ আমরা লিখতে পারি $\lim_{z \rightarrow 0}$

আমরা এখন এই সিরিজটি ব্যবহার করতে পারি

$$\log(1+z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 + \frac{z}{2} + \dots \right)$$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

6. ফাংশনের ফাংশনকে ডিফারেন্সিয়েশন:

একটা ফাংশনকে আমরা ডিফারেন্সিয়েশন করতে শিখেছি – কিন্তু অনেক সময়েই দেখা যায় শুধু এটুকু জানলেই কাজ হয় না আরো কিন্তু জানতে হয়। যেমন ধরা যাক আমরা $\sin x$ কে ডিফারেন্সিয়েশন করে পাই $\cos x$, কেমন করে পাই সেটাও জানি। কিন্তু ধরা যাক আমরা ডিফারেন্সিয়েশন করতে চাই $\sin x^2$ তখন কী করব? অর্থাৎ

$$y = f(v)$$

$$v = f(x)$$

$$\text{তাহলে } \frac{dy}{dx} = ?$$

যদি $y = \sin x^2$ এর উদাহরণটি নেই তাহলে লিখব

$$y = \sin v$$

$$v = x^2$$

বিষয়টা আসলে খুবই সোজা তার কারণ:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dv} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

ইচ্ছে করলে খুব সহজেই আমরা বের করতে পারব কেন $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, আপাতত; আমরা তোমাদের উপর সেটা ছেড়ে দিই! আমরা এটা ব্যবহার করে অগ্রসর হই।

কাজেই $y = \sin x^2$ এর বেলায় :

$$\frac{d}{dx} \sin x^2 = \left(\frac{d}{dv} \sin v \right) \left(\frac{dv^2}{dx} \right) = \cos v \times 2x = 2x \cos x^2$$

এবাবে করেকটা উদাহরণ করা যাব :

$$(i) y = e^{x^2}$$

এটাকে লেখা যায়:

$$y = e^v$$

$$v = x^2$$

$$\begin{aligned}\text{কাজেই } \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{dv} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right) = \left(\frac{de^v}{dv} \right) \left(\frac{dx^2}{dx} \right) = e^v 2x \\ &\frac{de^{x^2}}{dv} = 2x e^{x^2}\end{aligned}$$

$$(ii) y = \sin^4 x \quad \text{এটাকে লেখা যায়:} \quad y = v^4$$

$$v = \sin x$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{dv} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right) = \left(\frac{dv^4}{dv} \right) \left(\frac{d \sin x}{dx} \right) = 4v^3 \cos x \\ &\frac{d \sin^4 x}{dx} = 4 \sin^3 x \cos x\end{aligned}$$

$$(iii) y = \log \sqrt{x}$$

আমরা লিখতে পারি:

$$y = \log v$$

$$v = \sqrt{x}$$

কাজেই

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{dv} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right) = \left(\frac{d \log v}{dv} \right) \left(\frac{d \sqrt{x}}{dx} \right) = \\ &\frac{1}{v} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}$$

(iv)) $y = \sqrt{x^2 + a^2}$

আমরা লিখতে পারি:

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{v} \\v &= x^2 + a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{d\sqrt{v}}{dv}\right)\left(\frac{d(x^2 + a^2)}{dx}\right) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2x \\&\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\end{aligned}$$

এবাবে আমরা একটুখানি মজা করতে পারি!

আমরা জানি $y = f(u)$ এবং $u = f(x)$ হলে $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$

আমরা যদি লিখি: $y = f(x)$

$$x = f(y) \text{ তাহলে?}$$

বোঝাই যাচ্ছে তাহলে লিখতে পারব

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right) = 1$$

অর্থাৎ

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right) &= 1 \\ \left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}\end{aligned}$$

তোমরা হয়তো ভাবতে পার এটা করে আমাদের লাভ কী? কিন্তু এক্ষুনি দেখবে কখনো কখনো $\frac{dy}{dx}$ বের করা জিলি কিন্তু $\frac{dx}{dy}$ করা সোজা, তখন $\frac{dx}{dy}$ বের করে সেখান থেকে চট করে $\frac{dy}{dx}$ বের করে দেব। একটা উদাহরণ দেখা যাক:

(i) $y = \sin^{-1}x$

এটাকে সরাসরি ডিভারেলিয়েট না করে আমরা লিখি:

$$x = \sin y$$

$$\text{তাহলে } \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{আমরা জানি } \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

$$\text{তার মানে } \frac{d\sin^{-1}x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(i) $y = \tan^{-1}x$

আগের মত আবার লিখতে পারি $x = \tan y$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\text{আমরা জানি } \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

$$\text{কাজেই } \frac{d\tan^{-1}x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

7. ইম্প্লিচিট ফাংশন (Implicit Function):

মাকে মাকে আমরা এমন সমীকরণ পেয়ে যাই যেখানে y এবং x কে আলাদা করা কঠিন বিংবা অসম্ভব। তখন কী $\frac{dy}{dx}$ বের করা সম্ভব? একটা পদ্ধতি তোমাদের শিখিয়ে গাঢ়া যায়। যেটা হয়তো কাজে লাগবে। যেমন ধরা যাক দেয়া আছে :

$$x^3 - xy^2 + 3y^2 + 2 = 0 \text{ তাহলে } \frac{dy}{dx} = ?$$

আমাদের মনে হতে পারে হয়তো এভাবে চেষ্টা করতে হবে:

$$\begin{aligned}xy^2 - 3y^2 &= x^3 + 2 \\y^2 &= \frac{x^3 + 2}{x - 3}\end{aligned}$$

বিংবা

$$y = \sqrt{\frac{x^3 + 2}{x - 3}}$$

তারপর এটাকে আমরা ডিভারেন্সিয়েশন করতে পারি। যথেষ্ট জটিল কিন্তু করা অসম্ভব নয়। আসলে এটা আরো অনেক সহজে করা সম্ভব। আমরা সরাসরি সমীকরণটির প্রত্যেকটা পদকে আলাদা ভাবে ডিফারেন্সিয়েট করতে পারি।

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3 - xy^2 + 3y^2 + 2) &= 0 \\ \frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}xy^2 + \frac{d}{dx}3y^2 + \frac{d}{dx}2 &= 0 \\ 3x^2 - x(2y)\frac{dy}{dx} - y^2 + 3(2y)\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx}(6y - 2xy) &= y^2 - 3x^2 \end{aligned}$$

কাজেই

আমরা জানি

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2}{6y - 2xy}$$

কতো সহজ দেখেছ! ইচ্ছে করলে এখানে ভূমি y এর মান বসিয়ে পুটোটা x এর সম্শল হিসেবেও লিখতে পার!

ii) বৃত্তের সমীকরণ হচ্ছে
(৯ম ছবি):

$$x^2 + y^2 = r^2$$

বেধানে I হচ্ছে বৃত্তের ব্যাসার্ধ। কাজেই লিখতে পারি:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

আমরা এখানেও

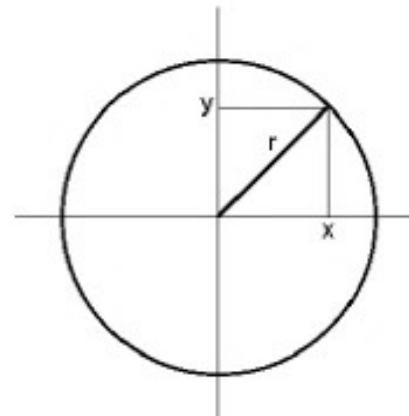
একইভাবে $\frac{dy}{dx}$ বের করতে পারি:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - r^2) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$



৯ম ছবি

বৃত্তটার দিকে তাকিবে ভূমি মিলিয়ে দেখ এটা তোমার ধারনার সাথে মিলে কী না। $X = 1$ হলে $\frac{dy}{dx}$ কতো হওয়া উচিত? $y = 1$ হলে কতো হওয়া উচিত? $X = -1$, কিংবা $y = -1$ হলে কী হওয়া উচিত?

অনুশীলনী

ডেরাইভেটিভ বের কর।

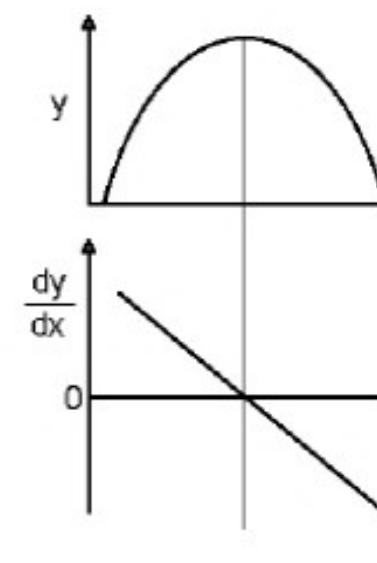
$$1. f(z) = (z^2 + 6)^7$$

$$2. f(x) = \sqrt{\log x}$$

$$3. f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$4. f(\theta) = \log \sin \theta$$

$$5. f(\theta) = \sqrt{\log \sin \theta}$$



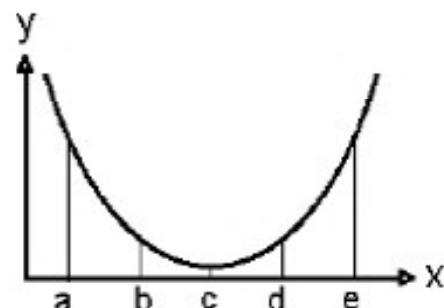
১২ম ছবি

১০ম ছবি

8. ফাংশনের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান :

ক্যালকুলাস ঘৰোগুলো মজুর বিষয় আছে তাৰ মাঝে একটা হচ্ছে একটা ফাংশনের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান বের কৰা। ১০ মৎ ছবিতে একটা ফাংশন দেয়া আছে দেখাই যাচ্ছে ফাংশনটার মান বাঢ়তে বাঢ়তে সর্বোচ্চ হয়ে তারপর আবার কমতে কম কৰেছে।

আমরা যেটুকু
ক্যালকুলাস শির্খোছি
সেখান থেকে খুব
সহজেই কলতে পারব
এই ফাংশনটা a
বিন্দুতে বাঢ়ছে,
কাজেই এখানে $\frac{dy}{dx}$
এর মান পজিটিভ। b
তে মান আৰেকটু



কমে c তে শূন্য হয়ে গেছে। c থেকে $\frac{dy}{dx}$ কমতে শুরু করেছে অর্থাৎ d তে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নিগেটিভ এবং c তে আরো বেশি নিগেটিভ মান পাব!

ছবিটির দিকে তাবিয়ে থাকলেই পুরো ব্যাপারটা স্পষ্ট হয়ে যায়। কোনো কিছু বাড়তে বাড়তে যখন সর্বোচ্চ মানে পৌছায় তখন আর বাড়তে পারে না, তখন মানটি কমতে শুরু করে। ডিফারেন্সিয়েশন যেহেতু পরিবর্তনের হার, সর্বোচ্চ মানে তার পরিবর্তন হয় না, তাই সেখানে $\frac{dy}{dx}$ এর মান শূন্য!

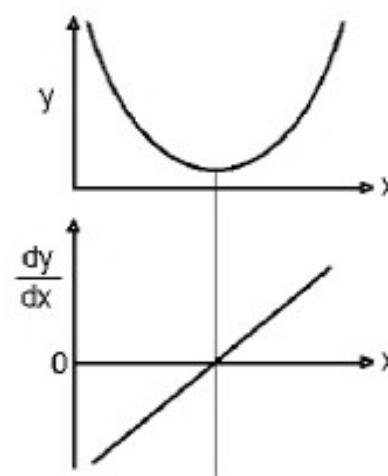
কাজেই আমরা বলতে পারি একটা ফাংশনের মান কোথায় সর্বোচ্চ, সেটা বের করা খুবই সোজা, দেখতে হবে কোথায় তার ডিফারেন্সিয়েশনের মান শূন্য। অর্থাৎ কোথায় $\frac{dy}{dx} = 0$

যুক্তিতে কোনো ভুল নেই কিন্তু একটা সমস্যা আছে। সেটা হচ্ছে এই পুরো যুক্তিটা সর্ব নিম্ন মানের জন্যেও সত্যি। বিশাস না হলে ১১নং ছবিটি দেখ।

এই ছবিতে দেখানো হয়েছে y এর মান a, b তে কমতে কমতে c তে পৌছে আর পরিবর্তিত হচ্ছে না। সেখানে $\frac{dy}{dx} = 0$, আবার c পার হওয়ার পর y এর মান বাড়তে শুরু করেছে। যেহেতু c কিন্তু মান সর্বনিম্ন তাই ঠিক সেখানে y এর কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না অর্থাৎ এখানে $\frac{dy}{dx} = 0$

কাজেই ব্যাপারটা কী এরকম দাঢ়াল যে, যদি $\frac{dy}{dx} = 0$ হয় তাহলে আমরা বলতে পারব, কাশন y এর মান সেখানে হয় সর্বোচ্চ, না হয় সর্বনিম্ন কিন্তু এটি কেনাটি সেটা বলা সম্ভব না?

হতাশ হওয়ার কিছু নেই,
 $\frac{dy}{dx} = 0$ থেকে আমরা হয়তো
 তার থেকে বেশি কিছু বলতে
 পারব না, কিন্তু আরেকটু বিশ্লেষণ
 করলেই আমরা পরিকল্পনা বলতে
 পারব সেটা কী সর্বোচ্চ নাকী
 সর্বনিম্ন! সেটা বোধার জন্যে
 আমরা ১২নং এবং ১৩নং ছবিতে
 সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন দুটোর
 জন্যেই y এর সাথে সাথে $\frac{dy}{dx}$
 টুকুও দেখানো যাব!



১৩নং ছবি

শুধু $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি যেখানে 0 কে ছেদ করেছে (অর্থাৎ যেখানে $\frac{dy}{dx} = 0$) সেই বিন্দুতে y হয় সর্বোচ্চ কিংবা সর্বনিম্ন কিন্তু $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি দেখে আমরা একটু মজার বিষয় বুঝতে পারলাম, যখন y এর মান সর্বোচ্চ, তখন $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি নিচের দিকে নামছে (১২নং ছবি)।

আবার যখন y এর মান সর্ব নিম্ন তখন $\frac{dy}{dx} = 0$ হলেও $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি উপরের দিকে উঠছে (১৩নং ছবি)। কাজেই $\frac{dy}{dx}$ রেখাটি উপরের উঠছে নাকি নিচের দিকে নামছে যেখান থেকে আমরা বুঝে যাব y ফাংশনটি সর্বোচ্চ নাকি সর্বনিম্ন।

রেখাটি উপরের দিকে উঠছে নাকি নিচের দিকে নামছে সেটা আমরা কেমন করে বুঝব?

খুবই সোজা! একটা রেখা যদি নিচের দিকে নামে তাহলে তার পরিবর্তনের হার নিগেটিভ, যদি রেখাটি উপরের দিকে উঠছে তাহলে তার পরিবর্তনের হার পজিটিভ। অর্থাৎ $\frac{df}{dx}$ কে যদি আবার ডিফারেন্সিয়েট করা হয় তাহলে সর্বোচ্চের ক্ষেত্রে নিগেটিভ, সর্বনিম্নের ক্ষেত্রে পজিটিভ।

একটা পরিবর্তনশীল ফাংশনের f যদি সর্বোচ্চ মান থাকে তাহলে সেই বিন্দুতে $\frac{df}{dx} = 0 \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) < 0$

আবার পরিবর্তনশীল একটা ফাংশন f এর যদি সর্বনিম্ন মান থাকে তাহলে সেই বিন্দুতে

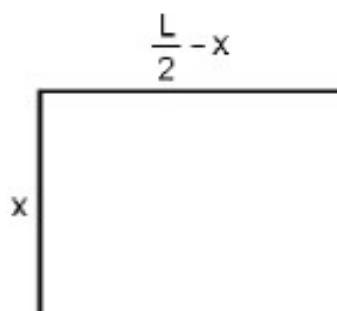
$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) > 0$$

ক্যালকুলাসের জগতে দুই কিংবা দুইয়ের বেশির সহজভাবে ডিফারেন্সিয়েট করাকে সহজভাবে লেখার নিয়ম :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) &= \frac{d^2f}{dx^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) &= \frac{d^3f}{dx^3} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) &= \frac{d^n f}{dx^n} \text{ ইত্যাদি।} \end{aligned}$$

এবারে আমরা সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানের ক্ষেত্রেকটা উদাহরণ করে দেখাই।

i) ধরা যাক তোমার কাছে L দৈর্ঘ্যের এক টুকরো সূতা অবস্থায় আছে। তোমাকে বলা হয়েছে এটাকে দিয়ে এমন একটা আয়তক্ষেত্র তৈরি করতে যেন আয়তক্ষেত্রটার ক্ষেত্রফল হয় সবচেয়ে বেশি।



কীভাবে তৈরী করবে?

১৪নং ছবিতে আমার L দৈর্ঘ্যের একটা সূতা দিয়ে আয়তক্ষেত্র তৈরি করে দেখিয়েছি।

এখনে আয়তক্ষেত্রের ঢার বাহ যোগ করলে আমরা পাই L , কাজেই আমাদের x এর মান কতো হবে সেটা বের করতে হবে।

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$$S(x) = x \left(\frac{L}{2} - x \right) = \frac{Lx}{2} - x^2$$

১৪নং ছবি

সবচেয়ে বড় ক্ষেত্রফলের জন্যে $\frac{dS(x)}{dx} = 0$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{d}{dx} \left(\frac{Lx}{2} - x^2 \right) = 0$$

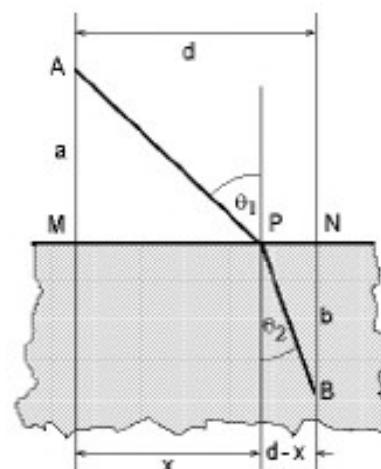
$$\frac{L}{2} - 2x = 0$$

$$x = \frac{L}{4}$$

অর্থাৎ আমরা যদি বর্গক্ষেত্র তৈরী করি তাহলে সেটির ক্ষেত্রফল হবে সবচেয়ে বড়।

(ii) ১৫নং ছবিতে দেখানো হয়েছে A বিন্দুতে থেকে আলো এবং B বিন্দুতে পৌছেছে। A বিন্দুটি বাতাসে এবং B বিন্দুটি পানিতে, আলোটি কোন পথে A থেকে B তে পৌছাবে?

ধরা যাক আলোক রেখাটি A থেকে P এবং P থেকে B



১৫নং ছবি

বিন্দুতে পৌছবে। ধরা যাক A থেকে পানির পৃষ্ঠে লম্বের উচ্চতা a , B থেকে পানির পৃষ্ঠের দূরত্ব b এবং M থেকে N এর দূরত্ব d । ধরা যাক পানির প্রতিসাংগত্য হচ্ছে n . কাজেই বাতাসে আলোর বেগ হবে c হলে পানির আলোর বেগ হবে $\frac{c}{n}$

(যারা এটি জানতে না তারা জেনে নাও, এটা হচ্ছে প্রতিসাংগত্যের সংজ্ঞা)

কাজেই A থেকে B তে যেতে আলোক রশ্মির কতোটুকু সময় লাগবে বের করার জন্যে দূরত্বকে সেখানকার বেগ দিয়ে ভাগ দিতে হবে।

অর্থাৎ

$$t = \frac{AP}{c} + \frac{PB}{\frac{c}{n}} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{a^2 + (d-x)^2}}{\frac{c}{n}}$$

আলো A থেকে B তে যাবে সবচেয়ে কম সময়ে! কাজেই x বিন্দুটি এমন একটি জায়গায় হবে যেন t হয় ক্ষুণ্ণতম অর্থাৎ

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

কাজেই লিখতে পারি:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{a^2 + (d-x)^2}}{\frac{c}{n}} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2c} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) (2x) + \frac{n}{2c} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + (d-x)^2}} \right) (-2x) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n \frac{x}{\sqrt{a^2 + (d-x)^2}}$$

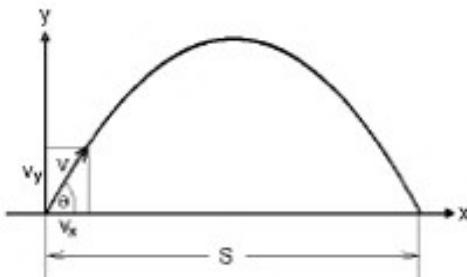
ত্রিকোণমিতির নিয়ম থেকে এটাকে এভাবে লিখতে পারি,

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) = n \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right)$$

$$n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}$$

যেটি আসলে প্রতিসাংগত্যের সূত্র! কী বিশ্ময়ের ব্যাপার শুধু গণিত ব্যবহার করে পদার্থবিজ্ঞানের সূত্র বের করে দেলোছি!

ইচ্ছে করলে ঠিক একইভাবে প্রতিষ্ঠানের সূর্যটাও বের করা সম্ভব। তেজি করে দেখ।



১৬নং ছবি

(iii) ধরা যাক ভূমির সাথে θ কোণ করে একটা বস্তু উপরের দিকে ছুড়ে দেয়া হয়েছে (১৬নং ছবি) θ এর মান কতো হলে এটা সবচেয়ে দূরে যাবে?

ধরা যাক বস্তুটাকে v বেগে ভূমির সাথে θ কোণে পাঠানো হয়েছে। আমরা এখানে v কোটাকে দুটি ভাগ

করতে পারি একটা ভূমির সাথে সমান্তরাল v_x , আরেকটি লম্ব v_y

$$v_x = v \cos\theta$$

$$v_y = v \sin\theta$$

$v \cos\theta$ এর কোনো পরিবর্তন হবে না কারণ x দিকে কোনো বল নেই যেটা v_x এর পরিবর্তন করতে পারে। কিন্তু v_y পরিবর্তন হবে কারণ নিচের দিকে মাধ্যকর্ষণ বলের জন্যে এখানে একটা ভূগর্বণ g রয়েছে।

কাজেই উপরের দিকে অতিক্রান্ত দূরত্ব h এর জন্যে লিখতে পারি

$$h = v_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

বস্তুটি ছুড়ে দেবার পর এটি কতক্ষণ ছুটে যাবে এটা এই সূত্র থেকে বের করা সম্ভব। শর্করে $h = 0$ ছিল, পুরো দূরত্বটুকু অতিক্রম করার সময় উপরে উঠে আবার নিচে নেমে $h = 0$ হয়ে যাবে। কাজেই t বের করার জন্যে আমরা লিখব:

$$h = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$t \left(v_y - \frac{1}{2} g t \right) = 0$$

এর দুটো সমাধান। একটি $t = 0$, যেটা শর্করে সত্য। আবার যখন

$$t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v \sin\theta}{g}$$

অর্থাৎ যখন নিচে নেমে আসবে।

কাজেই সমান্তরাল দিকে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব:

$$S = v_x t = v \cos\theta \left(\frac{2v \sin\theta}{g} \right) = \frac{2v^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

যারা ত্রিকোণমিতি জ্ঞান তারা কলতে পারবে যে

$$2\cos\theta \sin\theta = \sin 2\theta$$

কাজেই ভূমির সাথে সমান্তরাল অতিক্রান্ত দূরত্ব:

$$S = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

দেখতেই পাই θ এর মানের উপর নির্ভর করবে এটা কতো দূরত্ব অতিক্রম করবে। যেমন $\theta = 0$ হলে অর্থাৎ খাড়া উপরের দিকে ছুড়ে দিলে কোনো দূরত্বই অতিক্রম করবে না। আবার θ এর একটি মান থাকতে পারে যখন এটা সবচেয়ে বেশি দূরত্ব অতিক্রম করবে।

θ এর কোন মানের জন্যে এটা সবচেয়ে বেশি দূরত্ব অতিক্রম করবে সেটা বের করার জন্যে আমরা লিখতে পারি :

$$\frac{dS}{d\theta} = 0$$

অর্থাৎ

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{v^2 \sin 2\theta}{g} \right) = \frac{2v \cos 2\theta}{g} = 0$$

বিধবা

$$\cos 2\theta = 0$$

কাজেই আমরা জানি এটা সত্য হতে পারে যখন

$$2\theta = 90^\circ$$

অর্থাৎ ভূমির সাথে 45° কোনে ছুড়ে দেয়া হলে বস্তুটি সবচেয়ে দূরে গিয়ে পড়বে!

ডিম্বারেলিয়েশনে মোটমুটি কাজ চালানোর মত তথ্য দেয়া হয়েছে। বিষয়টা যদি সত্য সত্য শিখতে চাও তাহলে এখন সমস্যাগুলো করতে শুরু কর।

অনুশীলনী

1. x এর কোন মানের জন্যে নিচের ফাংশনটির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান
হয়েছে?

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$$

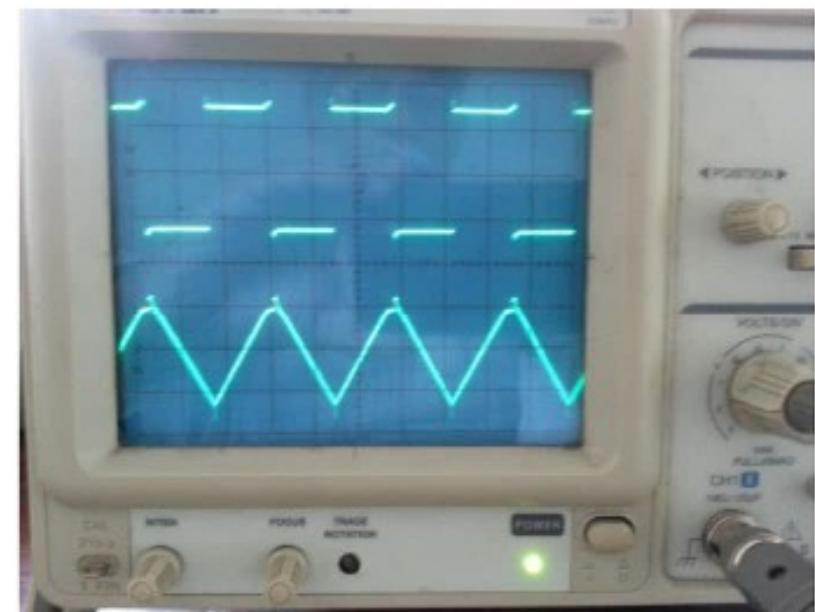
2. θ এর কোন মানের জন্যে $\sin\theta$ এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান
হয়েছে?

3. একটা বল u বেগে উপরের দিকে ছুড়ে দিলে তার উচ্চতা হবে
 $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$, কোন সময়ে এটি সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌছাবে? সেই
উচ্চতাটুকু কত?

4. দেখাও $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ ফাংশনের সর্বোচ্চ কিংবা
সর্বনিম্ন মান নেই!

5. দেখাও $x + \frac{1}{x}$ এর সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মান থেকে কম!

ইন্টিগ্রেশান



ইলেক্ট্রনিক্স সার্কিট দিয়ে ইন্টিগ্রেট করা উপরের ফাংশনটির ইন্টিগ্রেশান নিচে।

কাজেই কোনো কিছু চিহ্ন না করেই আমরা এখন বেশ করেকটা ইন্টেগ্রেশান লিখে বলতে পারি :

1. ডিফারেন্সিয়েশানের বিপরীত প্রক্রিয়া

আমরা ডিফারিলিয়েশাল ক্যালকুলাস শিখেছি। যার অর্থ একটা ফাংশন দেয়া হলে তার ডিফারেন্সিয়েশন বের করা শিখেছি। যদি সত্যই এটা শিখে থাকি তাহলে বলা যেতে পারে আমরা আসলে ইন্টেগ্রেশানও শিখে গেছি, কারণ ইন্টেগ্রেশান হচ্ছে ডিফারেন্সিয়েশানের বিপরীত প্রক্রিয়া, আর কিছু নয়। অর্থাৎ যদি

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

তাহলে $g(x)$ কে ইন্টেগ্রেট করলে আমরা পাব $f(x)$. ইন্টেগ্রেশান লেখার একটা নিয়ম আছে, সেই নিয়ম দিয়ে যদি লিখতে চাই তাহলে লিখতে হবে এভাবে

$$\text{যদি } \frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

তাহলে

$$\int g(x) dx = f(x)$$

কেন এভাবে লেখা হয়েছে আমরা একটু পরেই সেটাও খুঁটিয়ে খুঁটিয়ে দেখব, আপাতত মেনে নাও !

অর্থাৎ যদি

$$f(x) = x^3$$

তাহলে, আমরা জানি

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2$$

কাজেই আমরা বলতে পারি

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

কিংবা আরেকটু গচ্ছিয়ে লিখতে পারি

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$$

সাধারণভাবে বলতে পারি

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x$$

কোনো কিছু চিহ্ন না করে বেশিক্ষণ কাজ চালিয়ে যাওয়া ঠিক হবে না।

এবাবে এক সেকেন্ডের জন্যে একটু চিহ্ন করা যাক। ধরা যাক আমার ফাংশনটা শুধু x^3 নয় সেটি হচ্ছে

$$f(x) = x^3 + 5$$

তাহলে আমরা জানি

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2$$

আবার যদি হয়

$$f(x) = x^3 - 9$$

তাহলেও আমরা জানি

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2$$

সংগত কারাগেই একই উভয় এসেছে।

বিষ্ণু আমরা বলেছি একটা ফাংশন $f(x)$ কে ডিফারেন্সিয়েট করে যদি $g(x)$ পাই তাহলে $g(x)$ কে ইন্টেগ্রেট করে আমরা $f(x)$ পেরে যাব। তাহলে $3x^2$ কে ইন্টেগ্রেট করে আমরা কেবলটা পাব $3x^2 + 5$ নাকি $3x^2 - 9$?

একটু চিহ্ন করলেই বুঝতে পারবে শুধু +5 কিংবা -9 নয় এখানে যে কোনো অপরিবর্তনীয় মানের (constant) জন্যেই এটা সত্য। কাজেই বামেলাটুকু মেটানোর জন্যে আমরা লিখি

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

যেখানে C একটা ফ্রেব সংখ্যা বা এই ফ্রেব সংখ্যা C এর মান আমাদের জানা নেই, এটা সমস্যার উপরে নির্ভর করবে। কখনো এটা শূন্য হতে পারে অল্প কিছুও

হতে পারে। ইন্টিগ্রেশন প্রক্রিয়া এর মান বলে দিতে পারবে না। কাজেই এবাবে
আগে কোনোরকম চিন্তা না করে যেগুলো লিখেছিলাম সেগুলো আবাগ নৃত্য করে
লিখি।

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$$

2. অন্যভাবে ইন্টিগ্রেশন :

ডিফারেন্সিয়েশান টুকু বোঝার পর আমরা যদি জেনে যাই যে ইন্টেগ্রেশান হচ্ছে
ডিফারেন্সিয়েশনের বিপরীত প্রক্রিয়া তাহলেই কিন্তু ইন্টেগ্রেশনের যাবতীয় সমস্যা
করে ফেলা যায়। তার কারণ পৃথিবীর সব সম্ভাব্য অসম্ভাব্য ফাংশনের ইন্টেগ্রেশান
পাওয়া যায়, শুধু তাই নয় সম্ভাব্য ইন্টেগ্রেশনের সকলওয়ার আছে। কাজেই
কেউ যদি শুধু ব্যবহার করতে চায় তাহলে বেশি কিছু না জেনেই এটা ব্যবহার শুরু
করে দিতে পারে। কিন্তু আমরা বিষয়টা একটু বুরুতেও চাই। প্রথমেই ১৭নং ছবিটি
দেখানো যায়, এখানে উপরে একটি সম্ভাব্য ফাংশন দেখানো হয়েছে, মাঝখানে তার
ডিফারেন্সিয়াল এবং নিচে সেই ডিফারেন্সিয়ালের ডিফারেন্সিয়েশন দেখানো হয়েছে।

কাজেই উপরেরটি x^2 , মাঝেরটি $2x$ এবং নিচেরটি 2 ।

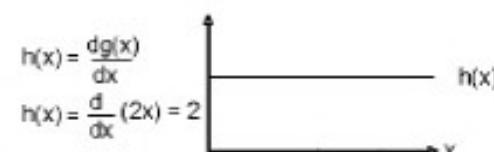
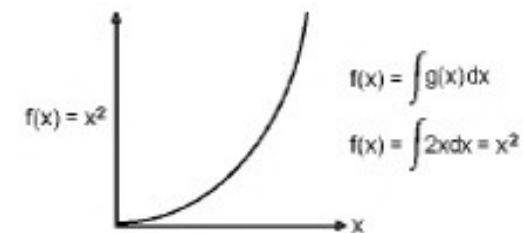
$$f(x) = x^2$$

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) = 2x$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{dg(x)}{dx} = h(x) = 2$$

এবাবে দ্বিতীয় এই তিনটি প্রক্রিয়া উপর থেকে নিচে না দেখে নিচের থেকে
উপরে দেখার চেষ্টা করি! প্রথম সম্ভাব্য সহজ $h(x) = 2$ সেটাকে ইন্টেগ্রেট
করে পেয়েছি দ্বিতীয়টি যেটি হচ্ছে $g(x) = 2x$ এবং সেটাকে ইন্টেগ্রেট করে
পেয়েছি $f(x) = x^2$

এবাবে দেখা যাক কোন প্রক্রিয়াটি দিয়ে আমরা নিচের $h(x) = 2$ থেকে
উপরের $g(x) = 2x$ পেয়েছি।



১৭নং ছবি

প্রক্রিয়াটি খুবই সহজ! ঘাসটির দিকে তাঙালেই বুকাতে পারব $h(x) = 2$
রেখাটিকে রেখার নিচে আবন্দ জায়গাটুকু একটা আয়তক্ষেত্র, তার এক বাহ 2,
অন্যবাহ x এবং এর ক্ষেত্রফল হচ্ছে $2x$! যার অর্থ একটা সম্ভাব্যকে যদি একটা
রেখা দিয়ে প্রকাশ

করা হয় তাহলে

রেখার নিচের

আবন্দ জায়গাটুকুর

ক্ষেত্রফলই হচ্ছে

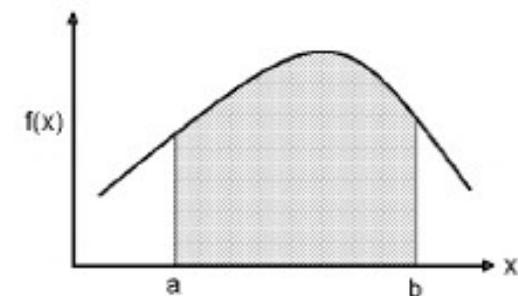
তার ইন্টেগ্রেশন।

আমাদের পর্যবেক্ষণ

যে সত্য সেটা

ছবিতে মাঝের

সম্ভাব্যটির দিকে



১৮নং ছবি

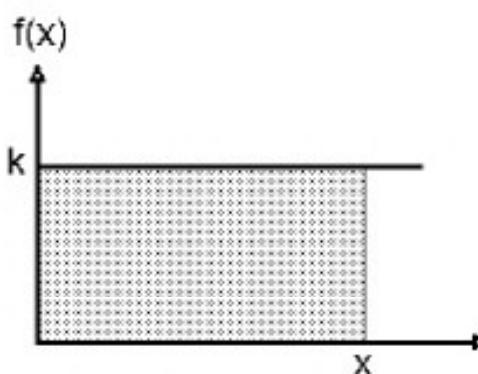
তাকালেই বুবতে পারব! এখানে ফাংশনটি হচ্ছে $g(x) = 2x$ এবং এটাকে ইন্টিগ্রেট করলে আমাদের পাওয়ার কথা x^2 .

আমরা যদি রেখাটির দিকে তাকাই তাহলে দেখব রেখাটির নিচে আবক্ষ জায়গাটুকু হচ্ছে একটা সমকেণ্টী ত্রিভুজ, যার ভূমি হচ্ছে x এবং লম্ব হচ্ছে $2x$. কাজেই এর ক্ষেত্রফল হচ্ছে $\frac{1}{2}x \cdot 2x = x^2$ ঠিক যেটা আমরা অনুমান করেছিলাম!

ডিম্বারেলিয়েশানের বেলায় ছিল একটি রেখার স্পর্শকের ঢাল। ইন্টিগ্রেশনের বেলায় সেটি হচ্ছে রেখার নিচে আবক্ষ জায়গার ক্ষেত্রফল!

ডিম্বারেলিয়াল শেখার সময় আমরা নানা ধরনের রেখা একে দেখিয়েছি একটা ফাংশনকে যদি একটা রেখা দিয়ে প্রকাশ করা যায় তাহলে ফাংশনের কোনো জায়গায় ডিম্বারেলিয়েশান করার অর্থ রেখাটির কোনো বিন্দুতে স্পর্শক বের করা। আগের চ্যাপ্টারে দেখিয়েছি একটা ফাংশনকে রেখা হিসেবে আঁকা হলে তার নিচের আবক্ষ জায়গা টুকুর ক্ষেত্রফল হচ্ছে ইন্টিগ্রেশন। ১৮নং ছবিতে সেটা বের করে দেখানো যাক।

আমরা সোজা থেকেও সোজা একটা ফাংশন ধরে নিই, সেটা হচ্ছে ফাংশনটির মান হচ্ছে অপরিবর্তিত ক্রবক (১৯নং ছবি)।



১৯ নং ছবি

মুচকি হেসে বলছ এটা আর কঠিন কী? খুবই সোজা! দাগ দেয়া অংশটুকু হচ্ছে একটা আয়তক্ষেত্র, তার এক বাহু হচ্ছে k অন্য বাহু হচ্ছে x , কাজেই আবক্ষ

$f(x) = k$
যদি এটাকে
আমরা রেখা হিসেবে
আবক্ষতে চাই তাহলে
রেখাটি x অক্ষের
সমান্তরাল একটা সরল
রেখা। আমরা এই
সরল রেখার x পর্যন্ত
অংশটুকুতে $f(x)$
দিয়ে আবক্ষ জায়গার
ক্ষেত্রফল বের করতে
চাই।

তোমরা নিচয়ই

জায়গাটুকু হচ্ছে kx ,
আমরা ক্ষেত্রফলটুকু
আরেকটা ফাংশন $g(x)$
দিয়ে প্রকাশ করতে পারি।
অর্থাৎ

$$f(x) = k$$

$$g(x) = kx$$

ধরে নেয়া যাক এই
খুবই সহজ বিষয়টা আমরা
জানি না, তাই আমরা
নিজেদের খুবি ব্যবহার
করে ক্ষেত্রফল $g(x)$
করতে চাই।

একটা সহজ উপায়
হচ্ছে ০ থেকে x পর্যন্ত
অংশগুলোকে Δx_1 ,
 Δx_2 , Δx_3 এ রকম
ছোট ছোট অনেকগুলো
অংশে ভাগ করা (২০নং
ছবি) প্রতিটি অংশে এক
বাহু হচ্ছে k এবং অন্য
বাহু হচ্ছে Δx_1 কিংবা
 Δx_2 ইত্যাদি।

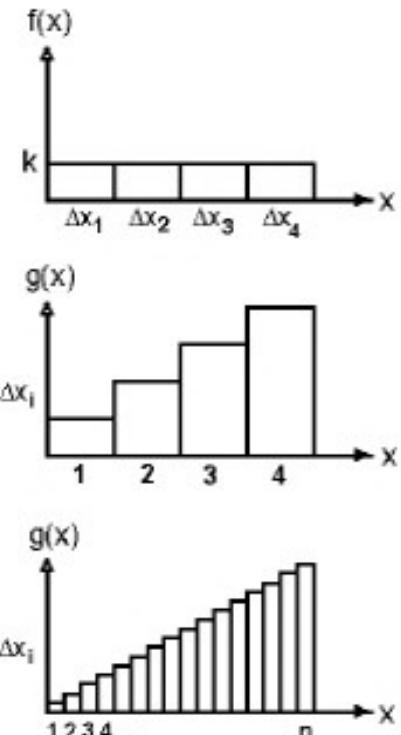
তারপর সবগুলো যোগ করে ফেললেই আমরা ক্ষেত্রফল পেয়ে যাব। অর্থাৎ

$$g(x) = k\Delta x_1 + k\Delta x_2 + k\Delta x_3 + R\Delta x_4$$

অনেকগুলো এরকম পদ যোগ করার একটা বিশেষ চিহ্ন আছে সেটা ব্যবহার
করে লিখতে পারি

$$g(x) = \sum_{i=1}^4 k\Delta x_i$$

(যারা এই চিহ্নটি আগে দেখিন তাদের জন্যে দুটো উদাহরণ দিচ্ছি:
ধরা যাক $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
লিখতে পারি



২০ নং ছবি

$$S = \sum_{i=1}^n i$$

আমরা জানি

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

লিখতে পারি

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ ইত্যাদি।}$$

২০নং ছবিতে উপরে আমরা প্রথমে চারটা অংশে ভাগ করে দেখিয়েছি এভাবে নেয়া হলে আমরা শুধুমাত্র x এর চারটি মানের জন্যে ফেক্টরিয়েল বের করতে পারব। দেখাই যাচ্ছে $g(x)$ যেন সর ধাপের সিডি! পরের ছবিতে আমরা n সংখ্যক ভাগে ভাগ করেছি, $g(x)$ এর মান x এর n সংখ্যক মানের জন্যে বের করতে পারব।

আমরা যদি n এর মান অসীম সংখ্যায় নিয়ে যাই তাহলে $g(x)$ টি হয়ে যাবে একটা সরল রেখা এবং তখন x এর যে কোনো মানের জন্যে $g(x)$ বের করতে পারব।

অর্থাৎ

$$g(x) = \sum_{i=1}^n R \Delta X_i$$

$g(x)$ টি যেন n ধাপের সিডি তবে সিডিখলোর ধাপ ছোট ছোট!

অর্থাৎ n কে যদি অসীমে নিচে যায় তাহলে $\Delta x = \frac{x}{n}$ কে লিখব dx এবং \sum কে লিখব \int

কাজেই

$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \rightarrow dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum \rightarrow \int$$

এবাবে আমরা একটা উদাহরণ করে দেখি!

উদাহরণ: একটি বস্তুর ত্বরণ a , t সময় পরে সেটি কতো দূরত্ব অতিক্রম করবে?

ত্বরণ হচ্ছে বেগের পরিবর্তনের হার, অর্থাৎ

$$a = \frac{dv}{dt}$$

লিখতে পারি $dv = adt$

দুই পাশে ইন্টেগ্রেট করি

$$\int dv = \int adt$$

$$v = at + C$$

দুই পাশের দুটি constant লেখা এবং যেকোনো এক পাশে একটি constant লেখা একই বল্থা!

$t = 0$ সময়ে
যদি বেগ v এর
একটি মান থাকে
সেটাকে বলে আদি
বেগ। আমরা যদি
সেটাকে u দিয়ে
প্রকাশ করি তাহলে
 $t = 0$ ব্যবহার করে
পাই

$$u = C$$

অর্থাৎ

২১নং ছবি

$$v = u + at$$

আমরা জানি সময়ের সাথে অবস্থানের S পরিবর্তনের হার হচ্ছে বেগ। কাজেই

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = v dt$$

দুই পাশে ইন্টেগ্রেট করে

$$\int ds = \int v dt$$

আবার আগের মত একটি constant $s = \int(u + at)dt = ut + \frac{1}{2}at^2 + C$

যদি ধরে নিই $t = 0$ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 0$ এবাবে তাহলে এবাবে
 $C = 0$
 অর্থাৎ

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

তোমরা যারা গতির সমীকরণ করেছ তারা অনেক কঠিখড় পুড়িয়ে আগে এটা
 বের করেছ ! এখন সোজা ।

3. ডেফিনিট ইন্টেগ্রাল :

ইন্টেগ্রেশানের একটা বড় ব্যবহার হচ্ছে ডেফিনিট ইন্টেগ্রাল । বিষয়টা বোৰাৰ
 একটা সহজ উপায় হচ্ছে একটা বেখাৰ নিচে নিৰ্দিষ্ট একটা অংশেৰ আবদ্ধ
 অংশটুকুৰ ক্ষেত্ৰফল বেৰ কৰা (২১নং ছবি) ।

ইন্টেগ্রেশান বোৰাৰ জন্যে এৱ আগেও আমরা বেখাৰ নিচে আবদ্ধ জায়গার
 ক্ষেত্ৰফল বেৰ কৰেছি কিন্তু কখনোই নিৰ্দিষ্ট মান বসিয়ে দিইনি । ডেফিনিট
 ইন্টেগ্রালে মান বসিয়ে দিতে হয় তখন সেটা আৱ ফাংশন থাকে না - কোনো এক
 ধৰণেৰ পৰিমাণ হয়ে যাব ।

ধৰা যাক ছবিতে দেখানো

$$x = a_1 \text{ থেকে } x = a_2 \text{ পৰ্যন্ত আমরা ইন্টেগ্রেট কৰাতে চাই ।}$$

আমরা এটা লিখব এভাবে

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx$$

যদি

$$\int f(x) dx = g(x)$$

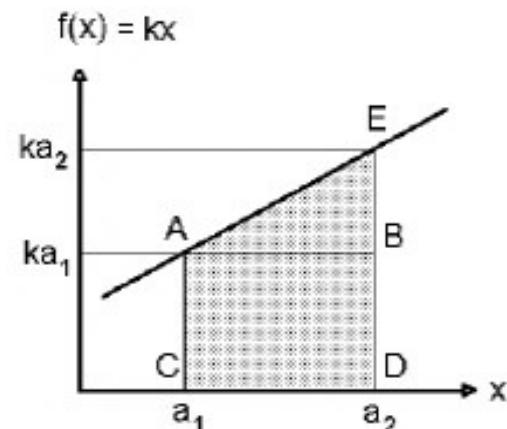
হয় তাহলে বোৰাই যাচ্ছে আমরা বেৰ কৰাতে চাই

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx = g(x) \Big|_{a_1}^{a_2} = g(a_2) - g(a_1)$$

বোৰাই যাচ্ছে ডেফিনিট ইন্টেগ্রাল কৰে যেহেতু আমরা X এৱ মান বসিয়ে দিই
 তাই সেটি আসলে এটি X এৱ ফাংশন থাকে না , এটিৰ একটি সুনিৰ্দিষ্ট মান থাকে ,
 কয়েকটা উদাহৰণ দিলোই বিষয়টা পৰিক্ষাৰ হয়ে যাবে ।

(i) ধৰা যাক ২২নং ছবিতে দেখানো $y = kx$ ৱেখাটিৰ a_1 থেকে a_2
 পৰ্যন্ত ডেফিনিট ইন্টেগ্রাল বেৰ কৰাতে চাই । সেটা যদি A হয় তাহলে আমৰা
 লিখব

$$A = \int_{a_1}^{a_2} kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_{a_1}^{a_2} = \frac{ka_2^2}{2} - \frac{ka_1^2}{2}$$



২২ নং ছবি

$$A = \frac{k}{2}(a_2^2 - a_1^2)$$

আমরা যদি জ্যামিতি ব্যবহার কৰে সকল ৱেখাটিৰ নিচে a_1 থেকে a_2 অংশেৰ
 ভেতৱেৰ ক্ষেত্ৰফল A বেৰ কৰাতে চাই তাহলে লিখব

$$A = A_1 + A_2$$

যেখানে A_1 হচ্ছে $ABCD$ আয়তক্ষেত্র এবং A_2 হচ্ছে ABE ত্রিভুজৰ
 ক্ষেত্ৰফল ।

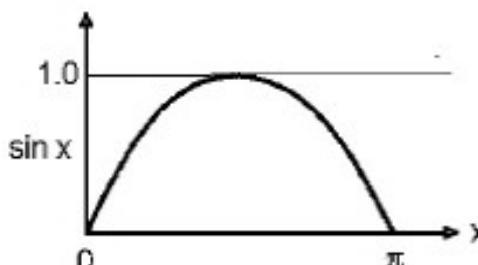
$$A_1 = ka_1(a_2 - a_1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[k(a_2 - a_1)](a_2 - a_1)$$

$$\text{কাজেই } A = A_1 + A_2 = \frac{k}{2}(a_2^2 - a_1^2)$$

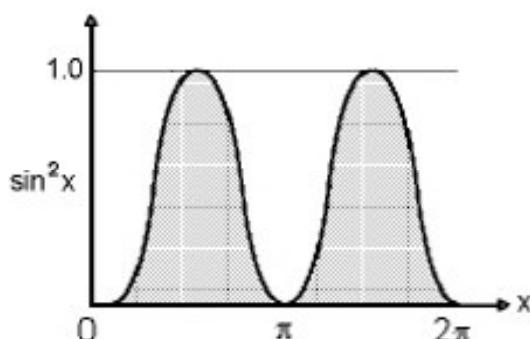
(ii) ২৩^{নং} ছবিতে একটা $\sin x$ কাণ্ডন আঁকা হয়েছে। এই কাণ্ডনটির ০ থেকে π পর্যন্ত ডেফিনিট ইন্টিগ্রাল বের করতে চাই।

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) \\ &= -(-1 - 1) \\ &\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2 \end{aligned}$$



২৩ নং ছবি

যদি ০ থেকে π পর্যন্ত বের না করে ০ থেকে 2π পর্যন্ত বের করতাম তাহলে কতো পেতাম?



২৪ নং ছবি

(iii) ধরা যাক $\sin x$ বাবহার না করে যদি $\sin^2 x$ বাবহার করে ০ থেকে 2π পর্যন্ত ডেফিনিট ইন্টিগ্রাল বের করতে চাই (২৪^{নং} ছবি)।

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

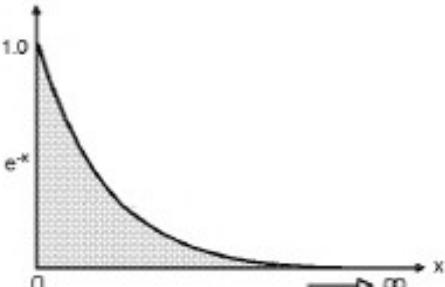
$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{2\pi} \\ A &= \frac{1}{2} (2\pi - 0) - \frac{1}{4} (\sin 4\pi - \sin 0) \\ A &= \pi \end{aligned}$$

এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ উভয় কারণ আমরা যদি 0 থেকে 2π পর্যন্ত পুরো অংশটি একটা আয়তক্ষেত্র হিসেবে দেখি তাহলে তার ক্ষেত্রফল হচ্ছে

$$A = 2\pi \times 1 = 2\pi$$

$\sin^2 x$ এর নিচের আবদ্ধ ক্ষেত্রফলটুকু হচ্ছে পুরো আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ঠিক অর্ধেক!

(iv) আমরা কী কখনো অসীম পর্যন্ত ইন্টিগ্রেট করতে পারি? সেমানের মনে হতে পারে তাহলে মানটুকু বুবি হয়ে যাবে অসীম! কিন্তু e^{-x} কাণ্ডনকে ০ থেকে ∞ পর্যন্ত ইন্টিগ্রেট করে দেখলে কেমন হয়?



২৫ নং ছবি

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -(0 - 1) \\ I &= 1 \end{aligned}$$

কী বিচ্ছিন্ন! আমরা 1 এর একটি নৃতন সংজ্ঞা পেয়ে গেলাম!

অনুশীলনী

1. $\int_0^4 \sqrt{t} dt = ?$ বের কর।

2. $\int_{-4}^{-2} x^4 dx = ?$ বের কর।

3. একটি গাড়ী $v = 5 + 6t$ বেগে যাচ্ছে, $t = 3$ এবং $t = 9$ সময়ের
তেজর গাড়ী কতো দূরত্ব অতিক্রম করবে?

4. $\int e^x dx = ?$ বের কর।

5. $y = 9x - x^2$ এই রেখার নিচে $x = 0$ এবং $x = 3$ আবক্ষ
জায়গাটুন্মা ক্ষেত্রফল কতো?

পরিণিষ্ঠ

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)$$

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\sin\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \dots (n-1) \times n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \dots$$

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$(x+y)^n = x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + C_3^n x^{n-3}y^3 + \dots + C_{n-1}^n xy^{n-1} + y^n$$